

全国高等学校クイズ選手権 2009 数学解説

ARQ

2009年9月5日

1 はじめに

第 29 回全国高等学校クイズ選手権・準決勝延長戦

さいころ (六面体で 1, 2, 3, 4, 5, 6 の目が振られているもの. 振るとそれぞれの目が均等な確率で出現する.) を 6 回振ったとき, それまでに出了目の和が途中で 6 になる確率を求めよ.

これは, 実際に放送された問題であるが, じっくり解くだけの時間は視聴者には与えられなかった*¹.

本稿は, (一応) 大学を卒業している筆者が, 大学生ならこう解くという見本を見せようと背伸びをした文書である.

2 実際に解いてみた

この問題は単純マルコフ過程と見なして解くことができる. 状態 X_i を次のように定める.

$$X_i \equiv \begin{cases} \text{和が } i \text{ である} & (i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}) \\ \text{和が途中で 6 になった} & (i = 6) \\ \text{和が途中で 6 になることなく 7 以上になった} & (i = 7) \end{cases}$$

すると, 確率過程を示す行列は次の A となる.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行列 A の $(i+1, j+1)$ 成分は, 状態が X_i である条件下でさいころを振ることにより, 状態が X_j に変化する確率を示している.

*¹ 時間を与えられたところで楽しんで解ける人は相当に限られているから, 編集者としてはこの判断は正しい. ただ, それならはじめからそのような問題を作るなどいいたい.

ここで、行列 $S = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ (すなわち、初期状態が X_0 であること) を定めると、 n 回さいころを振ったときに、どの状態になるかを示した確率を示す行列は SA^n である。

実際に SA^6 を計算すると、 $SA^6 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 16807/46656, 29849/46656)$ となるので、求める確率は $16807/46656$ となる。

ちなみに、行列 A は 8×8 行列であり、計算は大変そうに見えるが、 A は上三角行列であり、対角成分もほとんど 0 であるため見た目ほどは面倒ではない。