# 与えられた点を頂点とする多角形の面積

ARQ*

2018 年 2 月 1 日

**概要**

三角形の面積を求める方法はいろいろと知られている. しかし, 四角形の面積を求める方法は “四角形を 2 つの三角形に分割して求める” 以外の方法についてそれほど知られていないようだ.

四角形の面積を求める手段についていろいろと調べてみたところ, かなり難しい問題が含まれていることに気づいたので, 諸問題を本書にまとめてみた.

## 目次



* http://arq.name

# 1　三角形の面積の求め方

頂点 $A, B, C$ の対辺の長さをそれぞれ $a, b, c$ とする.

## 1.1　三角形の面積は平行四辺形の面積の半分

前節で述べたとおり, 三角形の面積は平行四辺形の面積の半分という考えから

$$\text{底辺} \times \text{高さ} \div 2 \tag{1}$$

という公式が与えられる. 執筆現在の学習指導要領によると, この公式は小学五年生から扱うようだ.

## 1.2　三角比を用いた表現

$\triangle ABC$ の面積については, 2 辺の長さと, それらによって挟まれてできる角の角度によって決定づけられる. $\angle A, \angle B, \angle C$ の対辺の長さをそれぞれ $a, b, c$ とすると, 次の (2), (3), (4) のうちのいずれか (全て等価である) で表される.

$$\frac{1}{2}ab\sin\angle C \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}bc\sin\angle A \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}ca\sin\angle B \tag{4}$$

図を描いてみると, どの式を用いても, (1) と等価であることがわかる.

これを発展させたのがベクトルの**ベクトル積 (クロス積, 外積)** である[*1]. ベクトル積の絶対値は 2 つのベクトルが作る平行四辺形の面積に等しい. $\overrightarrow{CB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{CA} = \boldsymbol{b}$ とすれば, 次の (5) は (2) と同じ意味である.

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| \tag{5}$$

なお, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の順に右ねじ系となっている[*2].

## 1.3　ヘロンの公式

三角関数は, 正弦, 余弦, 正接のうち, いずれか 1 つがわかれば, 残りの値も (複号の順が 2 とおり存在することを除けば) 一意に定まる. 特に, 三角形の内角については必ず平角より小さくなることから正弦は必ず正の値をとる.

また, 余弦については余弦定理により三角形の 3 辺の長さがすべて分かっていればその長さから導出することができる.

ここで, (3), 余弦定理 (28), ピタゴラスの基本三角関数公式 (23) を組み合わせるとヘロンの公式 (6) が導かれる.

---

[*1] ベクトル積の詳しい内容は A.3.3 を参照のこと.

[*2] $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ となるのでベクトル積では交換法則は成り立たない. 結合法則は成立する.

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{ただし}, s = \frac{a+b+c}{2} \tag{6}$$

## 2　四角形の面積の求め方

頂点を $A, B, C, D$ とし, $AB = p, BC = q, CD = r, DA = s$ とする.

### 2.1　ブレートシュナイダーの公式

三角形の求積方法にヘロンの公式 (6) が存在するように, 各辺の長さと対角の大きさから四角形の面積 $S$ を求めるブレートシュナイダーの公式 (7) が知られている.

$$S = \sqrt{(T-p)(T-q)(T-r)(T-s) - pqrs\cos^2\frac{\angle A + \angle C}{2}} \quad \text{ただし}, T = \frac{p+q+r+s}{2} \tag{7}$$

ブレートシュナイダーの公式は次のように証明される.

$$S = \triangle DAB + \triangle BCD = \frac{1}{2}ps\sin\angle A + \frac{1}{2}qr\sin\angle C \quad \text{ただし}, S \text{ は四角形 } ABCD \text{ の面積}$$

この式は, $S = \triangle DAB + \triangle BCD$ の部分が凹四角形には通用しないように見えるが, $\angle A$ または $\angle C$ が優角の場合は正弦の値が負になるので正しい. よって,

$$4S^2 = (ps)^2\sin^2\angle A + (qr)^2\sin^2\angle C + 2pqrs\sin\angle A\sin\angle C \tag{8}$$

を得る. また $BD$ について余弦定理 (28) を考えると

$$BD^2 = p^2 + r^2 - 2ps\cos\angle A = q^2 + r^2 - 2qr\cos\angle C$$

であるから,

$$\frac{1}{4}\left(p^2 - q^2 - r^2 + s^2\right)^2 = (ps)^2\cos^2\angle A + (qr)^2\cos^2\angle C - 2pqrs\cos\angle A\cos\angle C \tag{9}$$

(8) と (9) を辺々足し合わせ, ピタゴラスの基本三角関数公式 (23) と三角関数の加法定理 (32) を適用すると

$$4S^2 + \frac{1}{4}\left(p^2 - q^2 - r^2 + s^2\right)^2 = (ps)^2 + (qr)^2 - 2pqrs\cos(\angle A + \angle C)$$

さらに, 倍角公式 (35) を適用すると

$$4S^2 + \frac{1}{4}\left(p^2 - q^2 - r^2 + s^2\right)^2 = (ps)^2 + (qr)^2 - 2pqrs\left(2\cos^2\left(\frac{\angle A + \angle C}{2}\right) - 1\right)$$

両辺を 4 倍ずつして一部を移項.

$$16S^2 = -\left(p^2 - q^2 - r^2 + s^2\right)^2 + 4(ps)^2 + 4(qr)^2 + 8pqrs - 16pqrs\cos^2\left(\frac{\angle A + \angle C}{2}\right)$$

式の一部を因数分解.

$$16S^2 = 4(ps+qr)^2 - \left(p^2-q^2-r^2+s^2\right)^2 - 16pqrs\cos^2\left(\frac{\angle A+\angle C}{2}\right)$$

式の一部を因数分解.

$$16S^2 = \left(2ps+2qr+p^2-q^2-r^2+s^2\right)\left(2ps+2qr-p^2+q^2+r^2-s^2\right) - 16pqrs\cos^2\left(\frac{\angle A+\angle C}{2}\right)$$

式の一部を因数分解.

$$16S^2 = \left((p+s)^2-(q-r)^2\right)\left((q+r)^2-(p-s)^2\right) - 16pqrs\cos^2\left(\frac{\angle A+\angle C}{2}\right)$$

式の一部を因数分解

$$16S^2 = (p+q-r+s)(p-q+r+s)(p+q+r-s)(-p+q+r+s) - 16pqrs\cos^2\left(\frac{\angle A+\angle C}{2}\right)$$

よって, $T = \frac{p+q+r+s}{2}$ と置くことにより

$$S^2 = (T-p)(T-q)(T-r)(T-s) - pqrs\cos^2\left(\frac{\angle A+\angle C}{2}\right)$$

となるので (7) を得る.

#### 2.1.1　ブレートシュナイダーの公式の派生

ブレートシュナイダーの公式 (7) に関連して, 特別な条件を考える.

四角形が円に内接している場合は $\angle A+\angle C=\pi$ であることから $\cos\left(\frac{\angle A+\angle C}{2}\right)=0$ となるのでブラーマグプタの公式 (10) が成り立つ

$$S = \sqrt{(T-p)(T-q)(T-r)(T-s)} \quad ただし, T = \frac{p+q+r+s}{2} \tag{10}$$

これとは別に, 四角形が円に外接している場合は対辺の和が等しいので $T=p+r=q+s$ が成り立つ. よって, 次の式で面積が表される.

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{pqrs - pqrs\cos^2\left(\frac{\angle A+\angle C}{2}\right)} \\ &= \sqrt{pqrs}\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\angle A+\angle C}{2}\right)} \\ &= \sqrt{pqrs}\sin(\angle A+\angle C) \end{aligned} \tag{11}$$

四角形が内接円と外接円を両方持つ場合 (双心四角形) は次の式で面積が表される.

$$S = \sqrt{pqrs} \tag{12}$$

### 2.2　平面上の 4 点の座標から面積を得る方法

ブレートシュナイダーの公式は, 条件さえそろえば計算しやすいものである. しかしながら, 角度が事前にわかっているケースは少ない. では, 実践的にはどういう条件が与えられるのだろうか.

$p, q, r, s$ のみが与えられている場合では四角形の形状は決定できない. きちんと周回順に与えられたとしても, それだけでは形状は一意に定まらない.

四角形の頂点座標が座標平面上で与えられている場合が最も多いだろう. 単に頂点座標のみが与えられている場合, それが凹四角形となる場合は, 頂点座標を入れかえてもなお凹四角形となることがあるので必ず周回順に座標が与えられる必要がある.

さて, ブレードシュナイダーの公式の証明では $S = \triangle DAB + \triangle BCD$ を考えるところから出発した. これを (5) を使って表現してみよう.

$\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{s}, \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{p}, \overrightarrow{CB} = \boldsymbol{q}, \overrightarrow{CD} = \boldsymbol{r}$ とする. ベクトルの向きに注意すること. すると, 四角形の面積は (13) のとおりである.

$$S = \frac{1}{2} |\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{r}| \tag{13}$$

凸四角形ならば $\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{r}$ は同じ符号となり, 凹四角形で $\angle A, \angle C$ のうちどちらかが優角であれば異符号となるのでこの式は正しい. もちろん, これはあらかじめ座標で書けるので, プログラムを組むときは座標で記述したい. あらかじめ, (58) を適用して成分表示展開する. 頂点座標が $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3), P_4(x_4, y_4)$ で与えられたときの面積は (14) で与えられる.

$$S = \frac{1}{2} |x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_4y_1 - x_1y_4| \tag{14}$$

## 3　多角形の面積の求め方

せっかくなので, 多角形の場合についても考えてみる.

前節では四角形 $ABCD$ を対角線 $BD$ で分割した三角形を考え, 頂点 $A$ と 頂点 $C$ を基準とした求積を行った. 多角形の場合では, 対角線の引き方によっては正しく分割できないので適切に分割する方法をとる必要がある.

$P_i(x_i, y_i)$ (ただし, $i = 1, \ldots, n$) が添字順に正 $n$ 角形の各頂点を形成しているものとする. このとき, 点 $P_1$ からその他の頂点に対して対角線 (ただし, $P_2$ および $P_n$ に対してはもともと存在する辺) を引くと, $\triangle P_1P_iP_{i+1}$ なる三角形が $(n-2)$ 個できる. $\overrightarrow{P_1P_i} = \boldsymbol{p}_i$ とすればベクトル積により $\triangle P_1P_iP_{i+1}$ の面積が導出でき, さらに, それを座標で書き下すことができれば一般化した多角形の面積となる. つまり, $(P_{n+1} = P_1)$ とみなすことで (15) が成り立つ.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| \sum_{i=2}^{n-1} (\boldsymbol{p}_i \times \boldsymbol{p}_{i+1}) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n} (x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i) \right| \end{aligned} \tag{15}$$

# 付録 A　公式集

特記のない複号はすべて同順である.

## A.1　展開・因数分解

(16) は右分配法則, (17) は左分配法則と呼ばれており, これらを合わせて**分配法則**という.

$$(a+b)\,c = ac + bc \tag{16}$$
$$a\,(b+c) = ab + ac \tag{17}$$

以下の公式は, この分配法則を適用することで導かれる.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \tag{18}$$
$$(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2 \tag{19}$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \tag{20}$$
$$(a+b)\left(a^2 \mp ab + b^2\right) = a^3 \pm b^3 \tag{21}$$

## A.2　三角関数

$\angle A$ のように, 角度であることを明示している場合は三角形の内角であることを示し, $A$ のように, 角度であることを明示していない場合は一般角 (実数) で成立することを示す.

また, $\triangle ABC$ に対して各辺の長さを $BC = a, CA = b, AB = c$ とする.

### A.2.1　相互関係

正弦 (sin), 余弦 (cos), 正接 (tan) の相互関係の相互関係として (22) が与えられる.

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \tag{22}$$

また, (23) の関係は**ピタゴラスの基本三角関数公式**として知られている.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{23}$$

正弦の逆数を余割 (cosec, 更に略して csc), 余弦の逆数を正割 (sec), 正接の逆数を余接 (cot) という. つまり, 次の相互関係がある. ただし, 正弦が 0 に等しい場合の余割, 余弦が 0 に等しい場合の正割, 正接または余接のうち, どちらか一方が 0 の場合のもう一方に対応する値は未定義 (極限を考えると無限大に発散: 発散の方向は右極限と左極限で異なる) となる.

$$\begin{cases} \sin(x)\csc(x) = 1 \\ \cos(x)\sec(x) = 1 \\ \tan(x)\cot(x) = 1 \end{cases} \tag{24}$$

(22) と (23) を組み合わせることによって (25) を得る.

$$\begin{cases} 1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta \\ 1+\dfrac{1}{\tan^2\theta} = \dfrac{1}{\sin^2\theta} \Leftrightarrow 1+\cot^2\theta = \csc^2\theta \end{cases} \tag{25}$$

### A.2.2　正弦定理

$\triangle ABC$ の外接円の半径を $R$ とすると (26) の関係が成立する. これを**正弦定理**という.

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R \tag{26}$$

### A.2.3　余弦定理

余弦定理には**第一余弦定理** (27) と**第二余弦定理** (28) があるが, 一般に**余弦定理**といえば, 第二余弦定理のことをいう.

$$\begin{cases} a = b\cos\angle C + c\cos\angle B \\ b = c\cos\angle A + a\cos\angle C \\ c = a\cos\angle B + b\cos\angle A \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\angle A \Leftrightarrow \cos\angle A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ b^2 = c^2+a^2-2ca\cos\angle B \Leftrightarrow \cos\angle B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\angle C \Leftrightarrow \cos\angle C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases} \tag{28}$$

### A.2.4　正接定理

正接定理は (29) で表される関係をいう.

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{\angle A-\angle B}{2}}{\tan\frac{\angle A+\angle B}{2}} \tag{29}$$

直接的な利用方法は, 三角形のすべての内角の大きさと特定の 1 辺の長さが既知である場合に, 残りの辺の長さが求められるというものである.

これを応用すると, 2 辺の長さ $a, b$ とその間の角の大きさ $\angle C$ から, 他の辺と角の値を求めることができる.

(29) と $\angle A+\angle B+\angle C=\pi$ の関係から $\tan\frac{\angle A-\angle B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{\angle C}{2}$ とすることができ, $\angle A, \angle B$ が (30) の形で求められる. 辺の長さ $c$ は正弦定理 (26) で求めればよい.

$$\begin{cases} \cot\angle A = \left(\dfrac{b-a}{a}\right)\csc\angle C + \tan\dfrac{\angle C}{2} \\ \cot\angle B = \left(\dfrac{a-b}{b}\right)\csc\angle C + \tan\dfrac{\angle C}{2} \end{cases} \tag{30}$$

同じ条件で第二余弦定理 (28) から導出される $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\angle C}$ による計算も式の上では等価であ

るが, $\angle C{\approx}0, a{\approx}b$ の場合に第二余弦定理を由来とする式を用いてコンピュータに計算させると桁落ち[*3] の危険がある. 正接定理ではこれを回避できる.

### A.2.5　三角関数の加法定理

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \tag{31}$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \tag{32}$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)} \tag{33}$$

### A.2.6　多倍角の公式

加法定理から容易に導かれる.

■倍角の公式

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \tag{34}$$
$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 2\cos^2(x) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2(x) \\ &= \frac{1 - \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}\end{aligned} \tag{35}$$
$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)} \tag{36}$$

■三倍角の公式

$$\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x) \tag{37}$$
$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \tag{38}$$
$$\tan(3x) = \frac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3\tan^2(x)} \tag{39}$$

■半角の公式

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2} \tag{40}$$
$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x)}{2} \tag{41}$$
$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \csc(x) - \cot(x) \tag{42}$$
$$\tan\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{\sin(x) + \sin(y)}{\cos(x) + \cos(y)} \tag{43}$$

[*3] コンピュータ内部の小数は, 一般的に浮動小数点数 $\pm 2^e \times m$ という形式で記録されている. ただし, $\pm$ は正か負かで定まる情報 (符号部), $e$ は整数 (指数部), $m$ は $1 \le m < 2$ となるように正規化された離散的な値 (仮数部) である. 非常に近い値の浮動小数点数同士の差を計算すると, 計算過程で仮数部の上位がほとんど 0 となってしまい, 有効数字の桁数が下がってしまう.

#### A.2.7　和と積の変換

**■積和公式**　三角加法定理から導くことができる.

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2} \tag{44}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2} \tag{45}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2} \tag{46}$$

$$\cos(x)\sin(y) = \frac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{2} \tag{47}$$

**■和積公式**　積和公式において, $x = (X+Y)/2, y = (X-Y)/2$ とすると導くことができる.

$$\sin(x) \pm \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right)\cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right) \tag{48}$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{49}$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{50}$$

## A.3　ベクトル演算

**ベクトル**は, 大きさのみの情報量を持つ**スカラー**に対して, 大きさとともに方向の情報を併せ持つ量と定義されていることが多い. この定義は厳密には**幾何ベクトル**の話であるが, 本書の議論の範囲ではより一般的なベクトル空間の元として定義される**一般ベクトル**と区別する必然性はないので, 全て幾何ベクトルとして扱う.

成分を $n$ 個持つベクトルを $n$ 次元ベクトルという. ベクトルそのものを表現する方法として, 座標点を始点, 終点の順に書き, その上に矢印を記したもの (例えば, $\overrightarrow{AB}$), 太字であらわしたもの (例えば, $\boldsymbol{a}$), 更に矢印を記したもの (例えば, $\vec{\boldsymbol{a}}$) がある. さらに, その成分を書き下す場合は, 一般的に列ベクトルとして成分を縦に並べて表記される. 例えば 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ を成分で書き下すと次のようになる.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \tag{51}$$

各成分そのものはスカラーである. よって, $a_i$ は実数であったり複素数であったりする. なお, 左肩に $t$ と表記しているのは**転置行列** (行列の各成分の行番号と列番号をひっくり返したもの) を表している. よって, ${}^t\boldsymbol{a}$ は, 一般的に行ベクトルである.

#### A.3.1　和とスカラー倍

スカラーについては四則演算 (加減乗除) が定義されている. ベクトル演算については加減算とスカラー倍による乗算が定義されている.

これを成分で表現すると次のようになる.

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = {}^t\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & \cdots \end{pmatrix} \tag{52}$$

$$c\boldsymbol{a} = {}^t\begin{pmatrix} ca_1 & ca_2 & \cdots \end{pmatrix} \tag{53}$$

演算 $f$ に対して加法性 ($f(x+y) = f(x) + f(y)$) と斉次性 ($f(\alpha x) = \alpha f(x)$) が定義できる性質を**線型性**という. ベクトルは線型性を満たしている.

### A.3.2　内積

ベクトル同士の積の定義の一つに内積が存在する. 内積は同じ次元である 2 つのベクトルを対象にとり, その演算結果は複素数 (ただし, ベクトルの成分がすべて実数ならば演算結果は必ず実数) となる. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積であることの表現として $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ や $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ がある.

$\boldsymbol{x}$ の各成分について共役な複素数と入れ替えたものを $\bar{\boldsymbol{x}}$ とすると, $n$ 次元ベクトル同士の内積の定義は (54) のとおり.

$$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = {}^t\bar{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i b_i \tag{54}$$

**■大きさ**　自身同士のベクトルの内積は, 成分が複素数である限り必ず非負実数となる (零に等しくなるのはベクトルの成分がすべて 0 である零ベクトルの場合に限られる).

自身同士のベクトルの内積に対する正の平方根を**内積が定めるノルム**という.

$$\|x\| := \sqrt{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle} \tag{55}$$

また, 2 つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角 $\theta$ は次のようにして定められる.

$$\cos\theta = \frac{\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle}{\|a\|\,\|b\|} \tag{56}$$

### A.3.3　ベクトル積

ベクトル積 (**クロス積**) とは, 2 つのベクトルから新たなベクトルを与える二項演算である. 日本語では内積に対してという意味で**外積**と呼ばれることもある[*4]. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対するベクトル積は $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ あるいは $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と表現される. 二項演算のしてのベクトル積は 3 次元ベクトルの場合に限り定義される.

3 次元ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対するベクトル積は, 任意の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し

$$\langle\boldsymbol{v},[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\rangle = \det(\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \tag{57}$$

が常に成り立つベクトルとなる. ただし, $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ は標準的な列ベクトルを順に並べて作った行列である. 成分表示をすると次のようになる.

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \tag{58}$$

*4 外積を直訳した outer product は, 英語では**直積**を意味するので注意が必要である.

証明は省略するが, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \|a\|\,\|b\| \sin\theta$ である. ただし, $\theta$ は $\boldsymbol{a}$ から右ねじ方向に $\boldsymbol{b}$ を見たときの角度である. よって, 3 次元空間では, ベクトル積をとって, そのノルムを 2 で割ると 2 辺の長さとその間の角の大きさから三角形の面積を出せることに相当する.

ベクトル積の定義や (58) を見ると自明であるがベクトル積の順番を入れ替えると符号が逆転する.